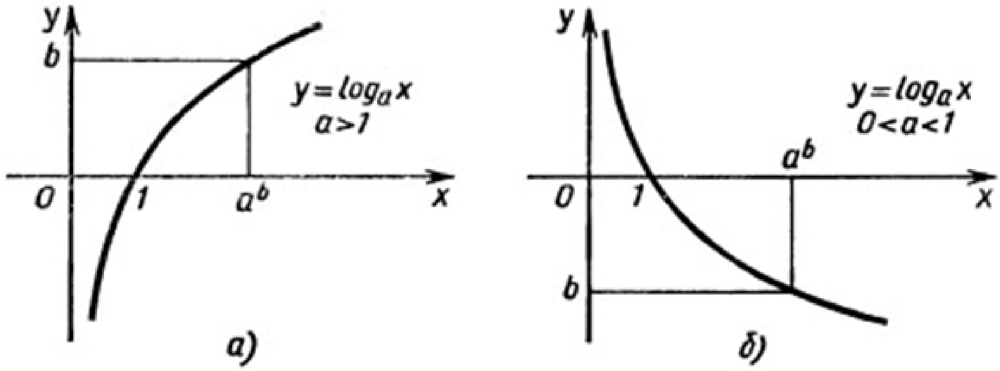


Учебно-методический комплекс
по алгебре и началам анализа

Тема «ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ»

Структура рабочей тетради соответствует структуре учебного пособия; уровень заданий соответствует требованиям, предъявляемым федеральной программой к уровню математической подготовки обучающихся; система заданий дополняет и расширяет систему заданий учебника.

Данная рабочая тетрадь разработана с учётом того, что в рабочей программе дисциплины «математика» на тему «Логарифмическая функция » отводится 16-18 часов.

Рабочая тетрадь содержит основные понятия теории и основные формулы, а также набор заданий для самостоятельной работы. Обязательно включено решение одной, двух типовых задач по каждой теме. В заключении предложено выполнить несколько тренировочных тестов для подготовки к ЕГЭ.

Основная задача учебно-методического комплекса – способствовать формированию у студентов прочных знаний по теме «Логарифмическая функция», в частности при вычислении выражений, содержащих логарифмы, при решении логарифмических уравнений и неравенств.

Разработчик: Колокольникова Екатерина Владимировна, ГПОУ ТАПТ.

Введение

Данная рабочая тетрадь может использоваться как самостоятельно (так как в тетрадь включены не только множество заданий разной степени сложности, но и все необходимые определения, подробные примеры и пояснения к ним), так и совместно с учебниками:

- «Алгебра и начала анализа 10-11 класс» Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И., М:Просвещение;
- «Алгебра и начала анализа 10класс» Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Ткачёва М.В., Фёдорова Н.Е., Шабунин М.И., М:Мнемозина;

Структура рабочей тетради соответствует структуре учебного пособия; уровень заданий соответствует требованиям, предъявляемым федеральной программой к уровню математической подготовки обучающихся; система заданий дополняет и расширяет систему заданий учебника. Рабочая тетрадь содержит основные понятия теории и основные формулы, а также набор заданий для самостоятельной работы. Обязательно включено решение одной, двух типовых задач по каждой теме. В заключении предложено выполнить несколько тренировочных тестов по форме ЕГЭ (задания В3,В7).

В данной рабочей тетради использованы различные формы изложения материала. Для изучения нового материала рабочие тетради оформлены как полноценный конспект, в котором есть и теория, и примеры решённых заданий, и задания для самостоятельного выполнения. Учебные пособия - рабочие тетради, разработаны так, что по алгоритму и количественной части решённого, а также с учетом возрастания сложности необходимо выполнить задание. При выполнении данных заданий требуются умения систематизировать, сравнивать, анализировать предложенную информацию, применять имеющиеся знания и умения в нестандартной ситуации. Причём информация представлена в различных видах (схемы, таблицы и т. д.). Задание так же имеют разную формулировку и различны по своему характеру: вводные, пробные, по образцу, творческие. Помимо упражнений и заданий в тетради включены и справочные материалы. В конце тетради предлагается уровневая контрольная работа, но выполнять её можно частями (при окончании изучения тем «Основные свойства логарифмов»», «Решение логарифмических уравнений» и «Решение логарифмических неравенств», чтобы легче контролировать усвоение материала и корректировать ошибки).

Использование рабочей тетради в учебном процессе позволяет осуществить: во-первых, достижение уровня обязательной математической подготовки; во-вторых сформировать умение применять полученные знания в несколько отличных от обязательных результатов обучения ситуациях; в – третьих ведёт к повышению активности и самостоятельности, планированию собственной деятельности.

Содержание учебного материала

Раздел II Логарифмическая функция	
Тема 1 Определение логарифма, свойства логарифмов	Определение логарифма числа, основное логарифмическое тождество. Свойства логарифмов. Обозначение десятичного и натурального логарифма. Десятичные и натуральные логарифмы .
Тема 2 Логарифмическая функция и ее график	Вид логарифмической функции, её основные свойства. Построение графика логарифмической функции с данным основанием.
Тема 3 Логарифмические уравнения	Виды логарифмических уравнений, основные приёмы решения логарифмических уравнений
Тема 4 Логарифмические неравенства	Виды логарифмических неравенств, основные приёмы решения логарифмических неравенств

Тема 1. Определение логарифма, свойства логарифмов

Историческая справка

Принцип, лежащий в основе любой системы логарифмов, известен очень давно и может быть прослежен в глубь истории вплоть до древневавилонской математики (около 2000 до н.э.). В те времена интерполяция между табличными значениями целых положительных степеней целых чисел использовалась для вычисления сложных процентов. Гораздо позже Архимед (287-212 до н.э.) воспользовался степенями числа 108 для нахождения верхнего предела числа песчинок, необходимого для того, чтобы целиком заполнить известную в те времена Вселенную. Архимед обратил внимание на свойство показателей степеней, лежащее в основе эффективности логарифмов: произведение степеней соответствует сумме показателей степеней.

В конце Средних веков и начале Нового времени математики все чаще стали обращаться к соотношению между геометрической и арифметической прогрессиями. М. Штифель в своем сочинении Арифметика целых чисел (1544) привел таблицу положительных и отрицательных степеней числа 2. Штифель заметил, что сумма двух чисел в первой строке (строке показателей степени) равна показателю степени двойки, отвечающему произведению двух соответствующих чисел в нижней строке (строке степеней). В связи с этой таблицей Штифель сформулировал четыре правила, эквивалентных четырем современным правилам операций над показателями степеней или четырем правилам действий над логарифмами: сумма в верхней строке соответствует произведению в нижней строке; вычитание в верхней строке соответствует делению в нижней строке; умножение в верхней строке соответствует возведению в степень в нижней строке; деление в верхней строке соответствует извлечению корня в нижней строке. По-видимому, правила, аналогичные правилам Штифеля, привели Дж. Непера к формальному введению первой системы логарифмов в сочинении Описание удивительной таблицы логарифмов, опубликованном в 1614. Независимо от Непера и почти одновременно с ним система логарифмов, довольно близкая по типу, была изобретена и опубликована Й. Бюрги в Праге, издавшем в 1620 Таблицы арифметической и геометрической прогрессий. В системе Непера логарифм числа 10^7 был принят за нуль, и по мере уменьшения чисел логарифмы возрастали. Когда Г. Бриггс (1561-1631) навестил Непера, оба согласились, что было бы удобнее использовать в качестве основания число 10 и считать логарифм единицы равным нулю. Тогда с увеличением чисел их логарифмы возрастали бы. Таким образом мы получили современную систему десятичных логарифмов, таблицу которых Бриггс опубликовал в своем сочинении Логарифмическая арифметика (1620). Логарифмы по основанию e, хотя и не совсем те, которые были введены Непером, часто называют неперовыми. Термины "характеристика" и "мантисса" были предложены Бриггсом. Первые логарифмы в силу исторических причин использовали приближения к числам 1/e и e.

<u>Определение логарифма</u>

Определение: Логарифмом числа х по основанию а, где $a>0$, $a\neq1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число а, чтобы получить число х.

Определение: Действие нахождения логарифма числа называют логарифмированием.

Обозначение: $\log_a x$ (логарифм числа х по основанию а)

а - основание логарифма

Задание **1**: Прочитать:

$$\log_2 4,\ \log_3 81,\ \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{512},\ \log_{16} 64,\ \log_7 7,\ \log_5 1$$

Задание **2**: Записать:

1) логарифм числа 8 по основанию 2;
2) логарифм числа 5 по основанию 5;
3) логарифм числа $\frac{1}{49}$ по основанию 7

Задание **3**: Сопоставить:

$\log_2 3$	логарифм числа 3 по основанию 2
$\log_3 2$	логарифм числа 2 по основанию 3

Определение: $\boxed{\log_a x = в, \text{ то } x = a^{в}}$

степень / число	-2	-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1/4	1/2	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	1/9	1/3	3	9	27	81	243	729	2187			
4	1/16	1/4	4	16	64	256	512	1024				
5	1/25	1/5	5	25	125	625	3125					
6	1/36	1/6	6	36	216	1296						
7	1/49	1/7	7	49	343							
8	1/64	1/8	8	64	512							
9	1/81	1/9	9	81	729							

Пример: Вычислить:

- $\log_2 8=3$, т.к. $2^3=8$ (см. таблицу)
- $\log_2 32=5$, т.к. $2^5=32$
- $\log_2 \frac{1}{32}=-5$, т.к. $2^{-5}=\frac{1}{32}$

Задание **4**: Вычислить:

1) $\log_7 343=3$, т.к. $2^{\cdots}=343$ 3) $\log_2 \frac{1}{128}$ 5) $\log_3 81$

2) $\log_5 25=\ldots.$, т.к. $5^{\cdots}=25$ 4) $\log_{\frac{1}{6}} 216$ 6) $\log_4 64$

Задание **5**: Найдите x

$\log_8 x = 3$; $\log_5 x = -1$; $\log_4 x = -2$; $\log_{0,1} x = -2$.

а) $\log_x 16 = 2$; б) $\log_x 81 = 4$.

Задание ***6***:Найдите значение выражения:

а) $\log_3(3\log_3 8)$; б) $\log_2(8\log_2 4)$.

Основные свойства:

1) $\log_a a = 1$
2) $\log_a 1 = 0$
3) $a^{\log_a x} = x$ (x>0,a>0, a≠1, основное логарифмическое тождество)

Задание 7: Заполнить таблицу:

№	пример	свойство	ответ
1	$\log_7 7$	1)	1
2	$\log_5 1$	2)	
3	$12^{\log_{12} 5}$	3)	
4	$\log_3 3$		
5	$8^{\log_8 4}$		
6	$\log_{23} 1$		

Задание **8**: Решить пример, выбрать букву, которая совпадает с правильным ответом и номером задания и получить слово:

№	М	Е	Ц	О	Л	К	Д
1	1	2	3	4	5	6	7
2	8	9	10	11	12	13	14
3	15	16	17	18	19	20	21
4	22	23	24	25	26	27	28
5	29	30	31	32	33	34	35
6	36	37	38	39	40	41	42
7	43	44	45	46	47	48	49

1) $\log_{11}11+ \log_{11}1$
2) $4^3-7^2-2^2$
3) 57:3
4) $\log_5 \ldots=2$
5) $\log_8 64+ \log_2 1024+23$
6) $18{,}5\cdot 2$
7) $3\cdot 105:7$

Задание **9**: «Магическая цепочка»

$\log_2 8 = \ldots$

$(4)^{\ldots} = \ldots$

$(\ldots)^2 = \ldots$

$\log_2 \ldots = \ldots$

$\ldots + \log_6 36 = \ldots\ldots\ldots$

Задание **10**:

Вычислите с помощью тождества $a^{\log_a b} = b$:

а) $2^{\log_2 4}$, $10^{\lg 100}$; **б)** $3^{-\log_3 3}$, $\left(2^{\log_2 5}\right)^2$;

в) $4^{\log_2 3}$, $25^{-\log_5 10}$.

Вычислите:

а) $2\log_5 25 + 3\log_2 64$; **б)** $\log_3 \log_3 \log_3 27$.

<u>Действия с логарифмами</u>

Теорема: Пусть $a>0$, $a\neq1$, $x>0$, $x_1>0$, $x_2>0$, p- любое действительное число. Тогда справедливы формулы:

логарифм произведения: $\log_c(a\cdot b)=\log_c a+\log_c b,\quad c>0,\quad c\neq1,\quad a>0,\quad b>0$

логарифм частного: $\log_c\left(\dfrac{a}{b}\right)=\log_c a-\log_c b,\quad c>0,\quad c\neq1,\quad a>0,\quad b>0$

логарифм степени: $\log_c a^k=k\cdot\log_c a,\quad c>0,\quad c\neq1,\quad a>0$

логарифм корня: $\log_c\sqrt[n]{a}=\dfrac{1}{n}\cdot\log_c a,\quad c>0,\quad c\neq1,\quad a>0$

переход к новому основанию: $\log_b a=\dfrac{\log_c a}{\log_c b},\quad b>0,\quad b\neq1,\quad a>0,\quad c>0,\quad c\neq1$

Дополнительные формулы: $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a},\quad a>0,\quad a\neq1,\quad b>0,\quad b\neq1$

$$\frac{\log_n b}{\log_n c}=\frac{\log_m b}{\log_m c}=\log_c b$$

$$\log_n b\cdot\log_m c=\log_m b\cdot\log_n c$$

$$a^{\log_n b}=b^{\log_n a}$$

$$\log_{a^m} b^m=\log_a b,\quad a>0,\quad a\neq1,\quad b>0$$

Пример: Вычислить:

1) $\log_6 18+\log_6 2=\log_6(18\cdot2)=\log_6 36=2$
2) $\log_{12}48-\log_{12}4=\log_{12}12=1$

Задание **1**: Дорешать, используя формулы:

1) $\log_{12}2+\log_{12}72=\log_{12}(2\cdot72)=\log_{12}\ldots=\ldots..$
2) $\log_{\frac{1}{5}}75-\log_{\frac{1}{5}}3=\log_{\frac{1}{5}}(\frac{75}{3})=\ldots\ldots.$
3) $\log_2 12-\log_2 15+\log_2 20=\log_2(\frac{12}{15}\cdot\ldots..)=\ldots\ldots.$

Задание **2**: Вычислить:

1) $\log_3 54-\log_3 2=$
2) $\log_{14}7+\log_{14}2=$
3) $\log_3 15+\log_3 18-\log_3 10=$
4) $\log_4 10+\log_4 8-\log_4 5=$

Задание **3:** Заполнить таблицу:

№	пример	упростить
1	$3\log_5 a + 6\log_5 в - 2\log_5 c$	$\log_5(\frac{a^3 \cdot в^6}{c^2})$
2	$4\log_5 a - 5\log_5 в + 7\log_5 c$	
3	$\log_5 в + 8\log_5 c + 2\log_5 a$	
4	$2\log_5 c - 2\log_5 a - \log_5 в$	

Задание **4**: Выполнить тест, заполнив таблицу:

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
ответ																		

1) Найдите значение выражения $\log_7 28 - \log_7 4$.

1) 1; 2) $\log_7 24$;

3) 0; 4) 7.

2) Найдите значение выражения $\log_{53}2+\log_{53}3+\log_{53}7$.

1) 12; 2) 1;

3) $\log_{53}42$· 4) $\log_{53}12$.

3) Найдите значение выражения $\log_{23}\frac{2}{3} + \log_{23} 6 - \log_{23} 4$.

1) $\log_{46}10$; 2) $\log_{23}4$;

3) 6; 4) 0.

4) Найдите значение выражения $\log_3 90 - \log_3 2 - \log_3 5$.

1) $\log_3 83$; 2) 2;

3) $-\log_3 10$; 4) -7.

5) Найдите значение выражения $2\log_{72}3 + 3\log_{72}2$.

1) 1; 2) $5\log_{72}5$;

3) 0; 4) $\log_{36}7$.

6) Найдите значение выражения $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{21}} 9 + \log_{21} 49$.

1) 1; 2) $2\log_7 3$;

3) 2; 4) -5.

7) Найдите значение выражения $\log_6 5 \cdot \log_5 8 + \log_6 27$.

1) 1; 2) $\log_{30}48$;

3) $2\log_7 23$; 4) 3.

8) Найдите значение выражения $4\frac{\log_7 2}{\log_7 80} + \log_{80} 5$.

1) 2; 2) 1;

3) $-3\log_7 75$; 4) $5\log_{21}15$.

9) Найдите значение выражения $\log_7(3^3 \cdot 7^5) - 2\log_7 3 - 5$.

1) $\log_7 3$; 2) -4;
3) 0; 4) $-2\log_{21}25$.

10) Найдите значение выражения $\log_{15} 5^3 + \log_{15} 3^4 + \log_{15} 5^6 3^5$.

1) $4\log_{15}45$; 2) $\log_3 15$;
3) 9; 4) -7.

11) Найдите значение выражения $\log_5 \sqrt{7} + 2\log_{25} \sqrt{7}$.

1) 0; 2) $-\log_5 245$;
3) $0{,}5$; 4) $\log_5 7$.

12) Найдите значение выражения $\frac{1}{2}\log_2 48 - \log_4 3$.

1) $5\log_2 9$; 2) 2;
3) $-2\log_4 3$; 4) 0.

13) Найдите значение выражения $11^{\log_{11\sqrt{11}}125 - \log_{121}9}$.

1) $8\frac{1}{3}$; 2) 1;
3) -121; 4) $\log_3 7$.

14) Найдите значение выражения $\frac{3}{4}\log_2 6 - \log_{16}27 + 13^{\frac{3}{2}\log_{13\sqrt{13}}18}$.

1) $6\log_2 3$; 2) 0;
3) $18{,}75$; 4) $-3\log_{13}7$.

15) Найдите значение выражения

$$\log_{105}12 + \log_{105}5 + \log_{105}7 - \log_{105}4.$$

1) 0; 2) 1;
3) $2\log_{105}20$; 4) -3.

16) Найдите значение выражения

$$\left(\log_{26} 5^{\log_5 169} + \log_{26} 4\right)^2 - 17^{4\log_{289}3}.$$

1) $\log_{26}10$; 2) 1;
3) $-\log_{13}9$; 4) -5.

17) Найдите значение выражения $2^{\log_{17}375 \cdot \log_5 17 - \log_5 3}$.

1) 8; 2) $\log_2 17$;
3) $-\log_5 25$; 4) 17.

18) Найдите значение выражения

$$(\log_3 28 \cdot \log_{154}3 + \log_{17}11 \cdot \log_{154}17 - \log_5 2 \cdot \log_{154}5)^2 + 7.$$

1) $\log_3 5 + \log_5 17$; 2) 8;
3) 1; 4) -13.

Проверь себя!

Задание 1: Дано $\log_7 2 = m$. Найти $\log_{49} 28$

Задание 2. Вычислить

1) $\log_2 \log_2 \log_2 2^{16}$

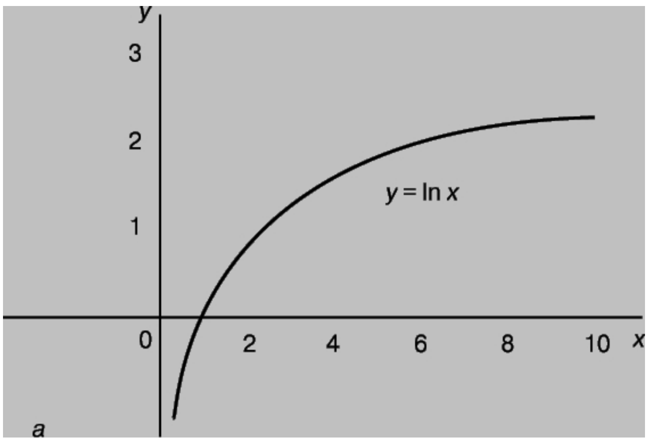
2) $16^{1+\log_4 5} + 4^{\frac{1}{2}\log_2 3 + 3\log_8 5}$

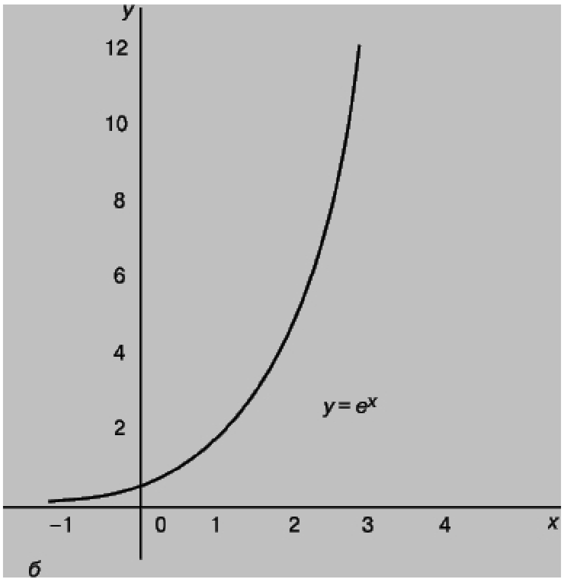
3) $2\log_{25} 30 + \log_{\frac{1}{2}} 6$

4) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log_{10} 2} - 8^{\log_2 3}$

Тема 2. Логарифмическая функция и ее график
Историческая справка

Было время, когда логарифмы рассматривались исключительно как средство вычислений, однако в 18 в., главным образом благодаря трудам Эйлера, сформировалась концепция логарифмической функции. График такой функции $y = \ln x$, ординаты которого возрастают в арифметической прогрессии, тогда как абсциссы - в геометрической, представлен на рис. а. График обратной, или показательной (экспоненциальной), функции $y = e^x$, ординаты которого возрастают в геометрической прогрессии, а абсциссы - в арифметической, представлен, соответственно, на рис. б.





Логарифмическая функция возникает в связи с самыми разными природными формами. По логарифмическим спиралям выстраиваются цветки в соцветиях подсолнечника, закручиваются раковины моллюска Nautilus, рога горного барана и клювы попугаев. Все эти природные формы могут служить примерами кривой, известной под названием логарифмической спирали, потому что в полярной системе координат ее уравнение имеет вид r = aebq, или lnr = lna + bq. Такую кривую описывает движущаяся точка, расстояние от полюса которой растет в геометрической прогрессии, а угол, описываемый ее радиусом-вектором - в арифметической. Повсеместность такой кривой, а следовательно и логарифмической функции, хорошо иллюстрируется тем, что она возникает в столь далеких и совершенно различных областях, как контур кулачка-эксцентрика и траектория некоторых насекомых, летящих на свет.

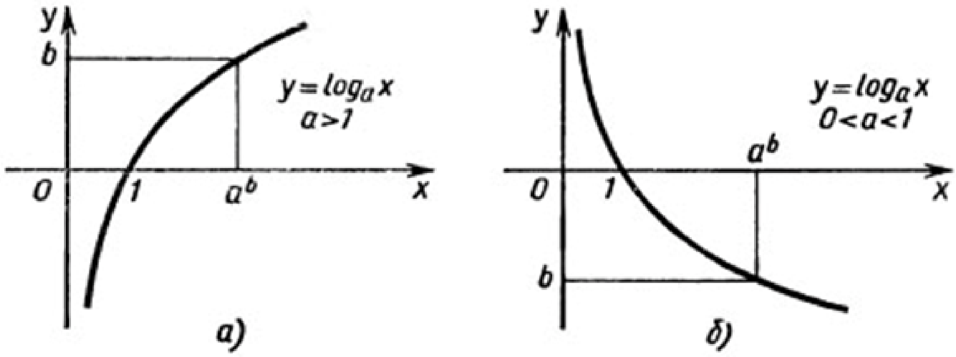
<u>Логарифмическая функция и ее график</u>

Определение: Функцию y= $\log_a x$, где a>0, a≠1, называют логарифмической функцией.

Свойство 1: Область определения логарифмической функции – множество всех положительных чисел.

Свойство 2: Множество значений логарифмической функции – множество всех R действительных чисел.

Свойство 3: Логарифмическая функция является возрастающей, если a>1, и убывающей если 0<a<1.



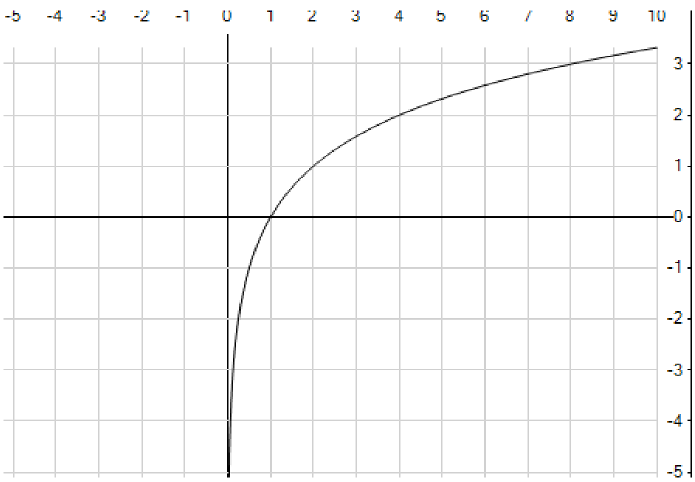
Пример: Построить графики функции $y=\log_2 x$, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

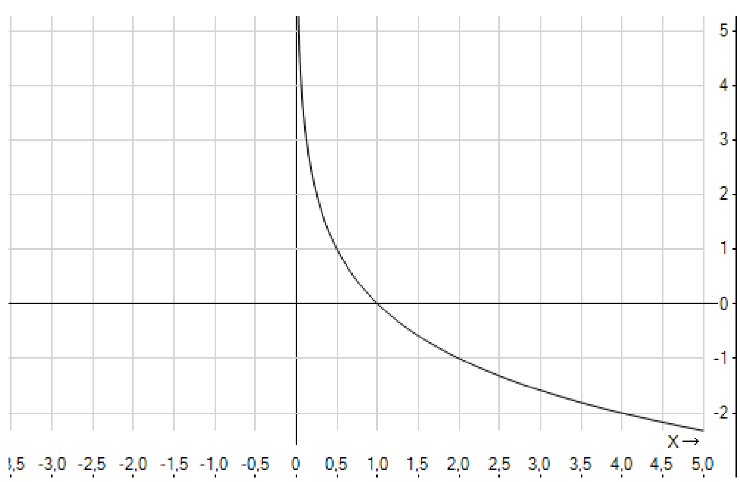
Составим таблицы:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

x	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$y=\log_{\frac{1}{2}} x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Схематично построим графики:





Задание **1**: Построить графики функции $y=\log_3 x$, $y=\log_{\frac{1}{3}} x$

$y=\log_3 x$

$y=\log_{\frac{1}{3}} x$

Проверь себя!

Решить графически уравнение:

(построив графики функций левой и правой части уравнения на одном чертеже и определив точку их пересечения)

1. $\log_2 x = -x + 1$

2. $\log_{\frac{1}{2}} x = 4x^2$

<u>Понятие о равносильности уравнений</u>

Определение: Уравнения, имеющие одно и тоже множество корней, называются равносильными.

Следствие: Два уравнения равносильны, если каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения и, наоборот, каждый корень второго уравнения является корнем первого.

Пример: Выяснить какому из следующих уравнений равносильно следующее уравнение:

$$3x-6=0$$

1) $5^x=25$ 2) $x^2-3x+2=0$ 3) $6x+7=5x+9$

Решение:

а) Решаем исходное уравнение:

$3x-6=0$, $3x=0+6$, $3x=6$, $x=\frac{6}{3}$, $\underline{\mathbf{x=2}}$

б) Решаем каждое из предложенных уравнений:

1) $5^x=25$, $5^x=5^2$, $\underline{\mathbf{x=2}}$
2) $x^2-3x+2=0$

$a=1$, $b=-3$, $c=2$

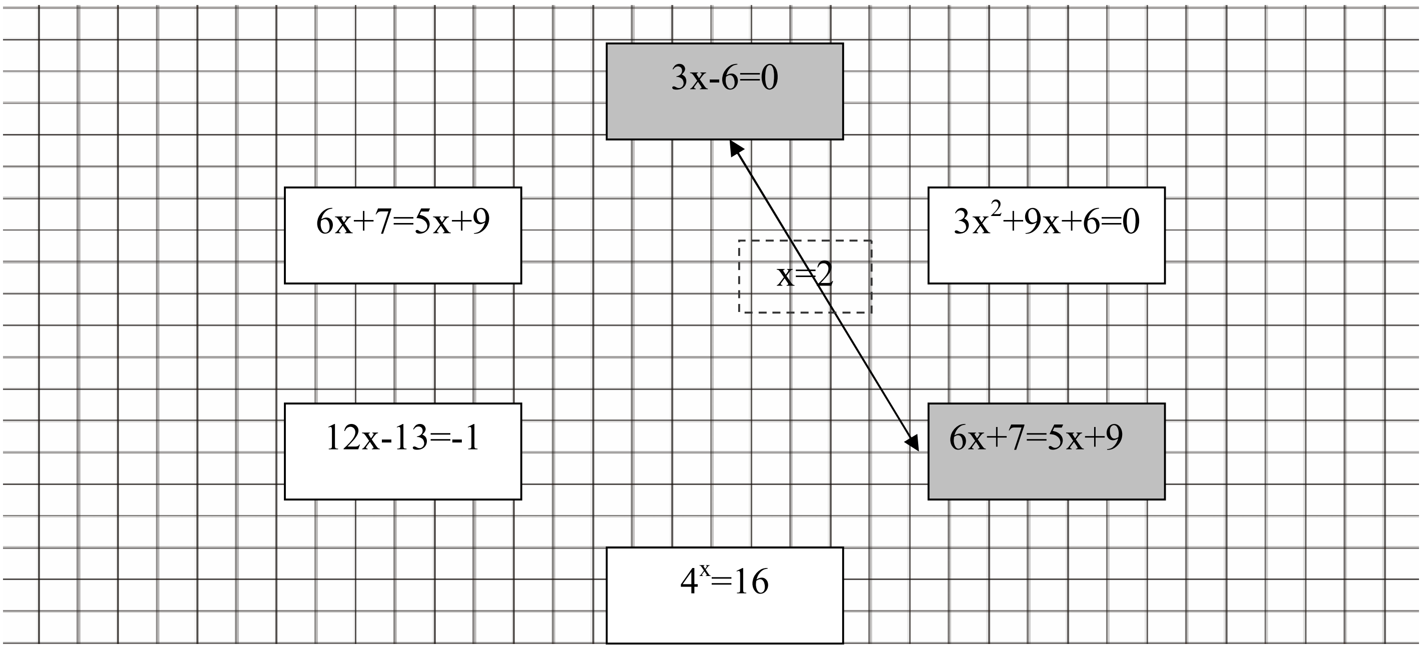
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}$$

$x_1=\frac{3+1}{2}=\frac{4}{2}=2$ $x_2=\frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=1$ $\underline{\mathbf{x_1=2,\ x_2=1}}$

3) $6x+7=5x+9$, $6x-5x=9-7$, $\underline{\mathbf{x=2}}$

Таким образом, исходному уравнению равносильны уравнения 1) и 3), так как у них совпадает множество корней ($x=2$).

Задание **1**: Сопоставить равносильные уравнения, указав множество их корней:



Тема 3. Решение логарифмических уравнений

Метод решения на основании определения логарифма.

Теорема: Уравнения $\log_a f(x) = g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$ и $f(x) = a^{g(x)}$ равносильны.

Пример: Решить логарифмическое уравнение:

$\log_6(3x+15)=2$

Решение:

$3x+15=6^2$

$3x+15=36$

$3x=36-15$

$3x=21$

$x=\frac{21}{3}$

$x=7$ Ответ: $x=7$

Задание **1**: Закончить решение:

1) $\log_4(2x-6)=3$

Решение:

$2x-6=4^3$

$2x-6=64$

$2x=64+6$

$2x=70$

$x=$…..

Ответ: $x=$….

2) $\log_{\frac{1}{2}}(8x-12)=-2$

Решение:

$8x-12=(\frac{1}{2})^{-2}$

$8x-12=2^2$

Ответ: $x=$….

3) $\log_3(4x-3)=2$

Решение:

$4x-3=$…..

Ответ: $x=$….

Задание **2**: Решить самостоятельно логарифмическое уравнение :

1) $\log_3(3x-2)=0$
2) $\log_3(5x-1)=2$
3) $\log_5(3x+1)=2$

$\log_3(3x-2)=0$
Решение:

$\log_3(5x-1)=2$
Решение:

$\log_5(3x+1)=2$
Решение:

Задание **3**: Проверить решение и найти ошибку:

$$\log_3(x^2-6x+17)=2$$

Решение:

$x^2-6x+17=3^2$

$x^2-6x+17=9$

$x^2-6x+17-9=0$

$x^2-6x+8=0$

$a=1,\ b=-6,\ c=8$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot8}}{2\cdot1}=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{6\pm2}{2}$$

$x_1=\frac{6+2}{2}=\frac{8}{2}=4 \qquad x_2=\frac{6-2}{2}=\frac{-4}{2}=-2$

Ответ: $x_1=4$, $x_2=-2$

Задание **4**: Закончить решение:

1) $\log_5(x^2-11x+43)=2$

Решение:

$x^2-11x+43=5^2$

$x^2-11x+43=25$

$x^2-11x+43-25=0$

$x^2-11x+18=0$

$a=1,\ b=-11,\ c=18$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\frac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4\cdot1\cdot18}}{2\cdot1}=\frac{11\pm\sqrt{121-72}}{2}=$$

$x_1=$….. $x_2=$….

Ответ: $x_1=$…., $x_2=$……

2) $\log_4(x^2-3x+18)=2$

Решение:

$x^2-3x+18=4^2$

$x^2-3x+18=16$

$x^2-3x+18-16=0$

Ответ: $x_1=$……, $x_2=$…….

Задание **5**: Решить логарифмические уравнение и из предложенного числового множества вычеркнуть полученные корни уравнений. В ответ записать полученное множество из оставшихся чисел.

1) $\log_3(x^2+2x-6)=2$
2) $\log_5(x^2+2x+17)=2$
3) $\log_2(x^2-3x+4)=3$

$\{-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5;\}$

$\log_3(x^2+2x-6)=2$
Решение:

$\log_5(x^2+2x+17)=2$
Решение:

$\log_2(x^2-3x+4)=3$
Решение:

Метод введения новой переменной.

Уравнение $c_0 \log^2{}_a x + c_1 \log_a x + c_2 = 0$, $c_0 \neq 0$, $a > 0$, $a \neq 1$

Обозначив $\log_a x = y$ и решив полученное квадратное уравнение, придём к уравнению типа 1).

Пример: Решить логарифмическое уравнение:

$$(\log_2 x)^2 + 8\log_2 x - 9 = 0$$

решение:

Пусть $\log_2 x = t$

$$t^2 + 8 \cdot t - 9 = 0$$

$$a=1,\ b=8,\ c=-9$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4\cdot 1\cdot(-9)}}{2\cdot 1} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-(-36)}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-8 \pm 10}{2}$$

$$t_1 = \frac{-8+10}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad t_2 = \frac{-8-10}{2} = \frac{-18}{2} = -9$$

$t_1=1$	$t_2=-9$
$\log_2 x = 1$	$\log_2 x = -9$
$x_1 = 2^1$	$x_2 = 2^{-9}$
$x_1 = 2$	$x_2 = \frac{1}{2^9}$
	$x_2 = \frac{1}{512}$

Ответ: $x_1=2$, $x_1 = \frac{1}{512}$

Примечание: Проверка в уравнениях данного вида не проводится, так как после замены переменной получаем равносильное уравнение.

Задание **6**: Закончить решение:

$$(\log_3 x)^2 - 5\log_2 x + 4 = 0$$

решение:

Пусть $\log_3 x = t$

$$t^2 - 5 \cdot t + 4 = 0$$

$$a=1,\ b=-5,\ c=4$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$t_1 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \qquad t_2 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$t_1=4$	$t_2=-1$
$\log_3 x = 1$	$\log_3 x = \ldots$
$x_1 = 3^1$	$x_2 = 3^{\ldots}$
$x_1 = \ldots.$	$x_2 = \frac{1}{\ldots.}$

Ответ: $x_1 = \ldots.$, $x_1 = \ldots..$

Задание **7**: Решить логарифмическое уравнение:

1) $(\log_8 x)^2 - 3\log_8 x + 2 = 0$
2) $(\log_2 x)^2 + 5\log_2 x - 6 = 0$
3) $(\log_4 x)^2 - 5\log_4 x + 6 = 0$

Ответ записать в виде таблицы:

№	уравнение	x_1	x_2
1	$(\log_8 x)^2-3\log_8 x+2=0$		8
2	$(\log_2 x)^2+5\log_2 x-6=0$	2	
3	$(\log_4 x)^2-5\log_4 x+6=0$	64	

Уравнения, решаемые с помощью формул

$$\left.\begin{aligned} \log_a x_1 + \log_a x_2 &= \log_a(x_1 \cdot x_2) \\ \log_a x_1 - \log_a x_2 &= \log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{при } a>0,\ a\neq 1,\ x>0 \\ &\underline{x_1>0,\ x_2>0} \end{aligned}$$

Задание **8**: Методом подстановки проверить являются ли числа –7;3 корнями уравнения $\log_3(x-2)+\log_3(x+6)=2$

Пример: Решить логарифмическое уравнение:

$$\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3$$

Решение:

$$\log_2(x-5)\cdot(x+2)=3$$
$$(x-5)\cdot(x+2)=2^3$$
$$x^2+2x-5x-10=8$$
$$x^2+2x-5x-10-8=0$$
$$x^2-3x-18=0$$
$$a=1,\ b=-3,\ c=-18$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-18)}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm\sqrt{9-(-72)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{81}}{2}=\frac{3\pm 9}{2}$$

$$x_1=\frac{3+9}{2}=\frac{12}{2}=6 \qquad x_2=\frac{3-9}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$

Примечание: В уравнениях данного вида необходимо выполнить проверку.

Проверка:

1) $x_1=6$

$\log_2(6-5)+\log_2(6+2)=\log_2 1+\log_2 8=0=3=3$

3=3

2) $x_2=-3$-неуд

$\log_2(-3-5)+\log_2(-3+2)=\log_2(-8)+\log_2(-1)$ (формула $\log_a x_1+\log_a x_2=\log_a(x_1\cdot x_2)$ справедлива при $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$, $\underline{x_1>0,\ x_2>0}$)

корень $x_2=-3$ является посторонним.

Ответ: x=6

Задание **9**: Решить логарифмическое уравнение:

1)$\log_3(x-2)+\log_3(x+6)=2$

2) $\log_3(5-x)+\log_3(-1-x)=3$

3) $\log_2(x-2)+\log_2(x-3)=1$

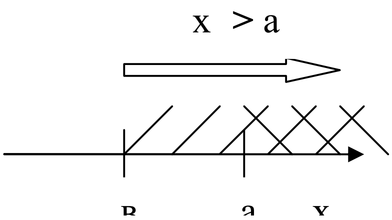
Задание **10***: Решить логарифмическое уравнение:

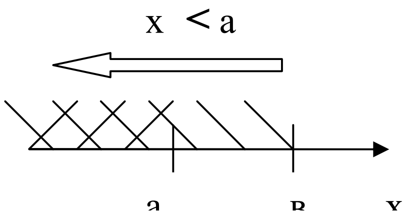
$$\log_5(x^2-4)-\log_5(x-2)=0$$

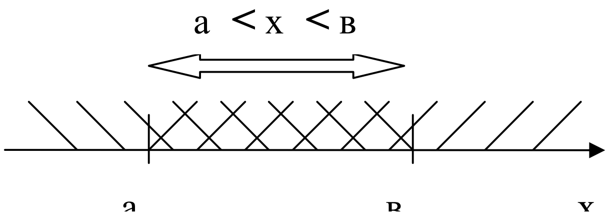
Решение логарифмических неравенств

Вспомним:

○ $\begin{cases} < \\ > \end{cases}$ **меньше;** / **больше;**   ● $\begin{cases} \le \\ \ge \end{cases}$ **меньше либо равно;** / **больше либо равно;**







Пример: Изобразить решение системы на числовой оси и записать ответ:

$\begin{cases} x<4 \\ x>-3, \end{cases}$ Ответ: $-3<x<4$

Задание **1**: Изобразить решение системы на числовой оси и записать ответ:

1) $\begin{cases} x>0 \\ x>6 \end{cases}$ Ответ:…………

2) $\begin{cases} x<0 \\ x<-7 \end{cases}$ Ответ:…………

3) $\begin{cases} x\le 1 \\ x>-2 \end{cases}$ Ответ:…………

4) $\begin{cases} x\ge -2 \\ x<1{,}5 \end{cases}$ Ответ:…………

Основные типы логарифмических неравенств:

1). $\log_a f(x) > g(x)$, $a> 0$, $a \neq 1$
2). $\log_a f(x) < g(x)$, $a> 0$, $a \neq 1$
3). $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, $a> 0$, $a \neq 1$
4). $c_0 \log^2_a x + c_1 \log_a x + c_2 > 0$, $c_0 \neq 0$, $a> 0$, $a \neq 1$
5). $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$

Решение указанных неравенств основано на следующих утверждениях:

Теорема. Если $a > 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно любой из систем:

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно любой из систем:

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Теорема. Неравенство $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} 0 < h(x) < 1 \\ f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(x) > 1 \\ f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Теорема. Неравенство $\log_a f(x) > g(x)$, $a > 1$равносильно неравенству $f(x) > a^{g(x)}$, при $0 < a < 1$ – системе

$$\begin{cases} f(x) > a^{g(x)} \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Теорема. Неравенство $\log_a f(x) < g(x)$, $a > 1$равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < a^{g(x)} \\ f(x) > 0 \end{cases},$$

при $0 < a < 1$ – неравенству $f(x) < a^{g(x)}$.

Теорема: Пусть $a>0$, $a\neq 1$, $x_1>0$, $x_2>0$ Если $\log_a x_1 > \log_a x_2$, то

1) при $a>1$ $x_1>x_2$ (знак сохраняем)

2) при $0<a<1$ $x_1<x_2$ (знак меняем)

Иначе:

$\log_a f(x) > b$

$a > 1$ → $f(x) > a^b$ **знак сохраняем**

$0 < a < 1$ → $f(x) < a^b$ **знак меняем**

Задание **2**: Заполнить таблицу:

№	Неравенство	Основание логарифма	Изменение знака
1	$\log_2(3x-4)>5$	$\frac{1}{4}$	Т.к. 2> 1, то знак **сохраняем**
2	$\log_{\frac{1}{2}}(8x-12)<-2$	$\frac{1}{2}$	Т.к $\frac{1}{2}<1$, то знак **меняем**
3	$\log_{\frac{1}{8}}(12-x)>5$		
4	$\log_7(9+x)<-1$		

Алгоритм решения логарифмического неравенства $\log_a f(x)>b$:

- Найти О.О.Ф. (область определения функции)
  О.О.Ф.: под логарифмическое выражение строго больше нуля ($f(x)>0$);
- По основанию логарифма определить сохранность знака;
- Решить непосредственно само логарифмическое неравенство;
- Составить систему из двух неравенств (П.1+П.3)
- Решить данную систему, совместив оба решения на числовой оси.

Пример: Решить логарифмическое неравенство:

$$\log_2(3x-4)>5$$

Решение:

1) О.О.Ф.: $3x-4>0$

$3x>0+4$

$3x>4$

$x>\frac{4}{3}$

$x>1\frac{1}{3}$

2) т.к.2>1, то знак сохраняем

$3x-4>2^5$

$3x-4>32$

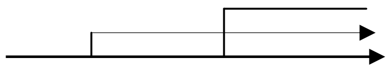
$3x>32+4$

$3x>36$

$x>\frac{36}{3}$

$x>12$

3) $\begin{cases} x>1\frac{1}{3} \\ x>12 \end{cases}$



Ответ: $x>12$

Задание **3**: Закончить решение:

А) $\log_5(8x-3)>1$

Решение:

1) О.О.Ф.: $8x-3>0$

$8x>0+3$

$8x>3$

$x>\frac{3}{8}$

2) т.к.5>1, то знак сохраняем

$8x-3>5^1$

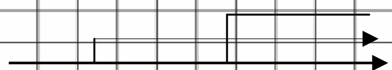
$8x-3>5$

$8x>5+3$

$8x>8$

$x>$ ….

3) $\begin{cases} x>\frac{3}{8} \\ x>\dots \end{cases}$



Ответ: $x>$….

Б) $\log_{\frac{1}{5}}(9-3x)<-2$

Решение:

1) О.О.Ф.: $9-3x>0$

$-3x>0-9$

$-3x>-9$

$\mathbf{3x<9}$

$x<\frac{9}{3}$

$x<3$

2) т.к. $\frac{1}{5}<1$, то знак меняем

$9-3x>(\frac{1}{5})^{-2}$

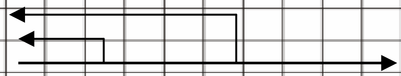
$9-3x>5^2$

$9-3x>25$

$-3x>25-9$

………

3) $\begin{cases} x<3 \\ x<-\dots \end{cases}$



Ответ: x>….

Задание **4**: Найти ошибку в решении логарифмического неравенства:

$\log_2(2x-3)\le 3$

Решение:

1) О.О.Ф.: $2x-3>0$

$2x>0+3$

$2x>3$

$x>\frac{3}{2}$

$x>1\frac{1}{2}$

2) т.к.2>1, то знак меняем

$2x-3\ge 2^3$

$2x-3\ge 8$

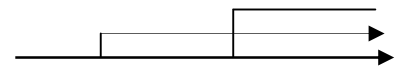
$2x\ge 8+3$

$2x\ge 11$

$x\ge\frac{11}{2}$

$x\ge 5\frac{1}{2}$

3) $\begin{cases} x>1\frac{1}{2} \\ x\ge 5\frac{1}{2} \end{cases}$



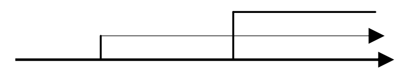
Ответ: $x\ge 5\frac{1}{2}$

Задание **5**: Решить логарифмические неравенства и указать их общее решение:

Пример:

- $\begin{cases} \log_2(3x-4)>5 & \text{Ответ: } x>12 \\ \log_5(8x-3)>1 & \text{Ответ: } x>1 \end{cases}$

Тогда общее решение:



$\begin{cases} \log_5(x-4)>2 \\ \log_{\frac{1}{5}}(4x+1)<-3 \end{cases}$

Решение

$\log_5(x-4)>2$

$\log_{\frac{1}{5}}(4x+1)<-3$

- $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(3x-1) > -3 \\ \log_3(3x-1) \leq 1 \end{cases}$

Решение

$\log_{\frac{1}{2}}(3x-1) > -3$

$\log_3(3x-1) \leq 1$

Задание **6**: Решить логарифмическое неравенство:

1) $\log_8(x^2-4x+3) < 1$

2) $\log_6(x^2-3x+2) \geq 1$

Проверь себя!

Решить логарифмическое неравенство:

1. $\log_3(x-1)\le 2$
2. $\log_{0,2}(2-x)>-1$
3. $\log_{0,3}(2x+5)\ge \log_{0,3}(x+1)$
4. $\log_3(x^2+7x-5)>1$
5. $\lg(x^2+2x+2)<1$

Контрольная работа

Уровень А:

1) Вычислить:

1) $\log_4 16+\log_{\frac{1}{3}} 81$

2) $15^{\log_{15}3}+2^{3\log_2 4}$

2) Решить логарифмическое уравнение:

1) $\log_3(4x-3)=2$

2) $\log_2(3x-4)=3$

3) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5x+33)=-3$

3) Решить логарифмическое неравенство:

1) $\log_2(x-4)>1$

2) $\log_{\frac{1}{5}}(4x-1)>-2$

Уровень В:

1) Вычислить:

1) $\log_3 9+\log_{\frac{1}{3}} 81-2\log_5 25$

2) $225^{\log_{15}3}+2^{3\log_2 4}$

3) $\log_6 72+\log_6 12-\log_6 4$

2) Решить логарифмическое уравнение:

1) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x+4)=-4$

2) $\log_{23}(x+2)=\log_{23}(4-x)$

3) $(\log_2 x)^2-9\log_2 x-10=0$

3) Решить логарифмическое неравенство:

1) $\log_3(x+1)\geq 2$

2) $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)>-2$

3) $\log_2(x^2+2x)<3$

Уровень С:

1) Вычислить:

1) $\frac{1}{2}\log_7 36+\log_7 14-3\log_7\sqrt[3]{2}$

2) $\log_3\log_2\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{256}$

2) Решить логарифмическое уравнение:

1) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+3)=-2$

2) $\log_3(x^3-x)-\log_3 x=\log_3 3$

3) Решить логарифмическое неравенство:

1) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x-6)\geq -3$

2) $\log_2(x-2)+\log_2(x-3)<1$

Решение очень многих логарифмических уравнений после некоторых преобразований сводится к решению одного или нескольких уравнений вида

$$\log_a f(x) = b \quad \text{или} \quad \log_a f(x) = \log_a g(x),$$

где $a > 0$, $a \neq 1$.

Для решения уравнения $\log_a f(x) = b$ достаточно только знания определения логарифма, из которого вытекает, что $f(x) = a^b$ (условие $f(x) > 0$ при этом, очевидно, выполняется, т. к. $a^b > 0$).

Из уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ следует, что $f(x) = g(x)$. В силу последнего равенства достаточно проверить корни полученного уравнения на выполнение только одного из неравенств $f(x) > 0$ либо $g(x) > 0$. В самом деле, если $g(x_0) > 0$, то в силу равенства $f(x_0) = g(x_0)$ получим, что и $f(x_0) > 0$. Задания 11 и 12 диагностических работ представляют собой уравнения указанных типов и сводятся в большинстве случаев к линейным уравнениям.

11. Решите уравнение

$$\log_4(5 + x) = 2.$$

Решение. Из определения логарифма следует, что

$$5 + x = 4^2,$$

откуда $x = 11$.

Ответ: 11.

12. Решите уравнение

$$\log_3(2x - 3) = \log_3(18 - x).$$

Решение. Поскольку основания логарифмов равны, можно перейти к системе

$$\begin{cases} 2x - 3 = 18 - x, \\ 2x - 3 > 0. \end{cases}$$

Корнем уравнения системы является число 7. При $x = 7$ неравенство системы, очевидно, выполнено.

Логарифмические уравнения, содержащие переменную в основании логарифма, которые могут встретиться в части 1 ЕГЭ, не слишком сильно отличаются по уровню сложности от уравнений, содержащих логарифмы только с постоянным основанием. Нужно лишь не забывать записывать дополнительные ограничения: выражение, стоящее в основании логарифма и содержащее переменную, должно быть положительно и отлично от единицы.

Решим в качестве примера уравнение

$$\log_{5-x} 169 = 2.$$

По определению логарифма находим, что

$$(5-x)^2 = 169,$$

причем

$$5-x > 0, \quad 5-x \neq 1.$$

Из уравнения $(5-x)^2 = 169$ получаем, что

$$5-x = 13 \quad \text{либо} \quad 5-x = -13.$$

Последнее равенство противоречит условию $5-x > 0$. Значит, $5-x = 13$, откуда $x = -8$.

Рассмотрим ещё один простой на первый взгляд пример, который порой вызывает затруднения, поскольку основания у логарифмов здесь различны (правда, выражения под знаками логарифмов одинаковы — именно это и дает ключ к решению). Решим уравнение

$$\log_{11}(19-x) = \log_{13}(19-x).$$

Для решения этого примера можно рассуждать по-разному. Вспомним, что логарифм — не что иное, как обозначение степени. Из уравнения следует, что число $19-x$ должно одновременно являться и степенью числа 11, и степенью числа 13, что возможно, лишь если эта степень равна нулю, т. е. если

$$19-x = 11^0 = 13^0 = 1,$$

откуда $x = 18$.

Другой способ заключается в переходе к новому основанию, в качестве которого в данном случае лучше выбрать 11 или 13. Перейдя, например, к основанию 11, получим

$$\log_{11}(19-x) = \frac{\log_{11}(19-x)}{\log_{11} 13}.$$

Далее остается перенести слагаемые в левую часть и вынести общий множитель:

$$\log_{11}(19-x)-\frac{\log_{11}(19-x)}{\log_{11}13}=0,$$

$$\log_{11}(19-x)\left(1-\frac{1}{\log_{11}13}\right)=0.$$

Поскольку $1-\dfrac{1}{\log_{11}13}\neq 0$, получим, что $\log_{11}(19-x)=0$, откуда $19-x=1$, $x=18$.

Тренировочная работа №1
Задание: Решить уравнение (если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них)

Уравнение		Ответ	
1.1.	$\log_5(7-x)=2$	**1.1.**	
1.2.	$\log_3(6-x)=3$	**1.2.**	
1.3.	$\log_2(4-x)=3$	**1.3.**	
1.4.	$\log_{49}(x-6)=\frac{1}{2}$	**1.4.**	
1.5.	$\log_{\frac{1}{7}}(6-x)=-2$	**1.5.**	
1.6.	$\log_{\frac{1}{8}}(7-x)=-2$	**1.6.**	
1.7.	$\log_{\frac{1}{7}}(9-x)=-2$	**1.7.**	
1.8.	$\log_{6-x}81=2$	**1.8.**	
1.9.	$\log_{3-x}25=2$	**1.9.**	
1.10	$\log_{x-7}64=2$	**1.10**	
1.11.	$\log_6(x+11)=\log_6(2x+1)$	**1.11.**	
1.12.	$\log_7(x+17)=\log_7(2x+7)$	**1.12.**	
1.13.	$\log_{17}(4x-9)=\log_{17}x$	**1.13.**	
1.14.	$\log_{13}(x^2-2x)=\log_{13}(x^2-24)$	**1.14.**	
1.15.	$\log_3(7-x)=\log_3(1-x)+1$	**1.15.**	
1.16.	$\log_5 x=-\log_{0,2}(14-x)$	**1.16.**	
1.17.	$\log_9(2x+5)=0,5\log_3(x+11)$	**1.17.**	
1.18.	$2\log_4(3x-5)=\log_2(15-x)$	**1.18.**	
1.19	$\log_7(3-x)=\log_6(3-x)$	**1.19**	
1.20.	$\log_{17}(x+5)=\log_{17}(x+5)$	**1.20.**	

При повторение темы «Преобразования логарифмических выражений» следует вспомнить ряд основных формул, связанных с логарифмами:

$$a^{\log_a b} = b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0),$$

$$\log_c a + \log_c b = \log_c(ab) \quad (a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1),$$

$$\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b} \quad (a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1),$$

$$\log_c a^b = b \log_c a \quad (a > 0, c > 0, c \neq 1),$$

$$\log_{c^d} a = \frac{1}{d} \log_c a \quad (a > 0, c > 0, c \neq 1, d \neq 0),$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \quad \text{и, в частности,}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 0, b \neq 1, c \neq 1),$$

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a} \quad (a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1).$$

Большинство заданий на преобразование логарифмических выражений и вычисление их значений можно отнести к одной из следующих групп:

— упражнения на непосредственное использование определения и свойств логарифмов,

— упражнения на вычисление значения логарифмического выражения по данному значению другого выражения или логарифма.

Так, например, для того чтобы найти значение выражения $\left(6^{\log_7 67}\right)^{\log_6 7}$, достаточно воспользоваться свойством степеней $\left(a^b\right)^c = \left(a^c\right)^b$ и преобразовать данное выражение так:

$$\left(6^{\log_7 67}\right)^{\log_6 7} = \left(6^{\log_6 7}\right)^{\log_7 67} = 6^{\log_6 67} = 67.$$

1). Найдите значение выражения

$$11 \cdot 6^{\log_6 2}.$$

Решение. Применив основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$, получим: $11 \cdot 6^{\log_6 2} = 11 \cdot 2 = 22$.

Ответ: 22.

2). Найдите значение выражения

$$\log_a(ab^3),$$

если $\log_b a = \frac{1}{7}$.

Решение. Из условия следует, что a и b — положительные числа, отличные от 1. Поскольку логарифм произведения двух чисел равен сумме логарифмов этих чисел по тому же основанию, получим: $\log_a(ab^3) = \log_a a + \log_a b^3 = 1 + \log_a b^3$. Последовательно применяя формулы $\log_c a^b = b\log_c a$ и $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, находим:

$$1 + \log_a b^3 = 1 + 3\log_a b = 1 + 3 \cdot \frac{1}{\log_b a}.$$

По условию $\log_b a = \frac{1}{7}$, значит, искомое значение равно $1 + 3 \cdot 7 = 22$.

Ответ: 22.

Тренировочная работа №2
Задание: Найти значение выражения

	Выражение		Ответ
2.1.	$\log_6 0{,}9 + \log_6 40$	**2.1.**	
2.2.	$\log_7 4{,}9 - \log_7 0{,}1$	**2.2.**	
2.3.	$12 \cdot 7^{\log_7 5}$	**2.3.**	
2.4.	$9^{\log_3 2}$	**2.4.**	
2.5.	$\log_9 27$	**2.5.**	
2.6.	$(3^{\log_2 3})^{\log_3 2}$	**2.6.**	
2.7.	$\log_{\frac{1}{6}} 36$	**2.7.**	
2.8.	$\log_{\frac{1}{6}} \sqrt{7}$	**2.8.**	
2.9.	$\dfrac{\log_5 36}{\log_5 6}$	**2.9.**	
2.10	$\dfrac{\log_{25} 7}{\log_5 7}$	**2.10**	

Тренировочная работа №3
Задание: Найти значение выражения

Выражение		Ответ	
3.1.	$\log_a(ab), если \log_a b = 5$	**3.1.**	
3.2.	$\log_a(\frac{a}{b}), если \log_a b = -4$	**3.2.**	
3.3.	$\log_a(ab), если \log_b a = \frac{1}{6}$	**3.3.**	
3.4.	$\log_a(\frac{a}{b}), если \log_b a = -2$	**3.4.**	
3.5.	$\log_a(ab^3), если \log_a b = -2$	**3.5.**	
3.6.	$\log_a(\frac{a}{b^5}), если \log_a b = 3$	**3.6.**	
3.7.	$\log_a(\frac{a^3}{b^7}), если \log_b a = 7$	**3.7.**	
3.8.	$\log_a(a\sqrt{b}), если \log_b a = \frac{1}{7}$	**3.8.**	
3.9.	$\log_a(\sqrt[5]{\frac{a}{b}}), если \log_a b = 6$	**3.9.**	
3.10	$\log_a(\sqrt[3]{a^2 b}), если \log_b a = \frac{1}{7}$	**3.10**	